

Contrôle et optimisation de systèmes physiques : mécanique quantique et confinement magnétique dans les stellarators

Rémi Robin

Thèse préparée au Laboratoire Jacques-Louis Lions
sous la direction de **U. Boscain** et **M. Sigalotti**



16 septembre 2022

- 1 Optimisation pour le confinement magnétique
 - Introduction à la physique des stellarators
 - Forces de Laplace sur une surface (chap. IV)
 - Optimisation de la CWS (chap. II)

- 2 Contrôle d'ensemble en mécanique quantique (chap. V)
 - Introduction au contrôle quantique
 - Compatibilité entre deux approximations
 - Un résultat de contrôlabilité



Stellarator

L'approche stellarator : manufacturer un confinement magnétique principalement grâce à un champ externe.

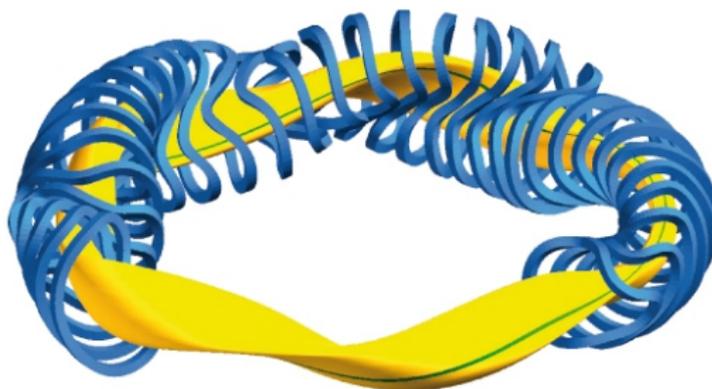
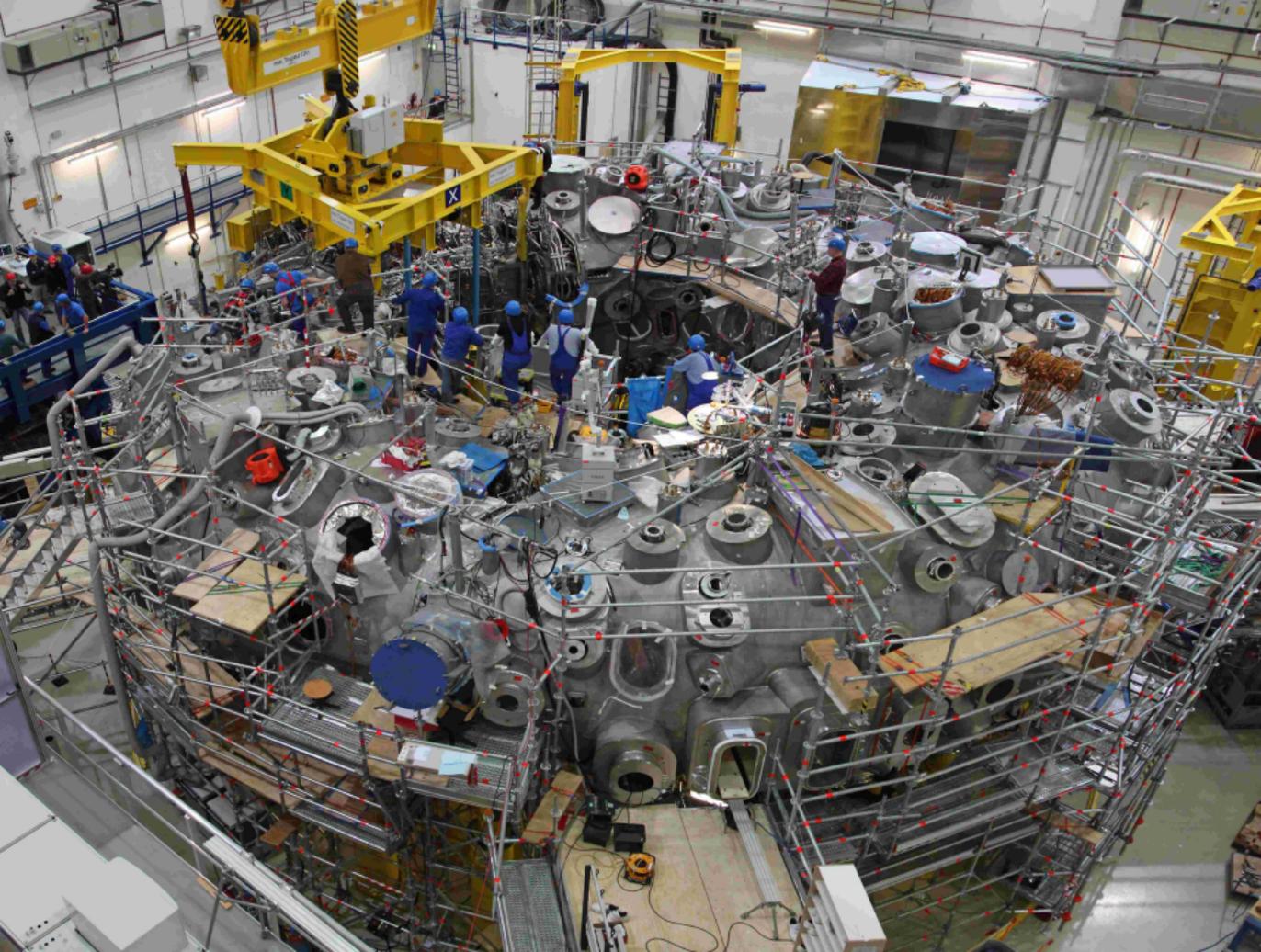


FIGURE – Wendelstein 7-X, Max-Planck Institut für Plasmaphysik



Modélisation

Le problème d'optimisation :

$$\inf_{\substack{j \in L^2(\mathfrak{X}(S)) \\ \operatorname{div} j = 0}} \chi_B^2(j)$$

Fonction coût :

$$\chi_B^2(j) = \int_P |\operatorname{BS}(j)(y) - B_T(y)|^2 dy$$

Loi de Biot et Savart :

$$\forall y \notin S, \operatorname{BS}(j)(y) = \int_S j(x) \times \frac{y - x}{|y - x|^3} dx$$

Un problème inverse

$BS(\cdot)$ est continu de $L^2(\mathcal{X}(S)) \rightarrow C^k(P, \mathbb{R}^3)$. En particulier,

$$\begin{aligned} L^2(\mathcal{X}(S)) &\rightarrow L^2(P, \mathbb{R}^3) \\ j &\mapsto BS(j) \end{aligned}$$

est compact.

Un problème inverse

$BS(\cdot)$ est continu de $L^2(\mathfrak{X}(S)) \rightarrow C^k(P, \mathbb{R}^3)$. En particulier,

$$\begin{aligned} L^2(\mathfrak{X}(S)) &\rightarrow L^2(P, \mathbb{R}^3) \\ j &\mapsto BS(j) \end{aligned}$$

est compact.

Solutions :

- Résoudre sur un espace de dimension finie²
- Utiliser une régularisation de Tychonoff³

$$\|j\|_{L^2}^2 = \int_S |j|^2 dS$$

-
2. P. Merkel (1986)
 3. M. Landreman (2017)

Lemme

Pour tout $\lambda > 0$, le problème

$$\inf_{\substack{j \in L^2(\mathbb{X}(S)) \\ \operatorname{div} j = 0}} \chi_B^2(j) + \lambda \|j\|_{L^2}^2$$

admet un unique minimiseur j_S donné par

$$j_S = (\lambda \operatorname{Id} + \operatorname{BS}_S^\dagger \operatorname{BS}_S)^{-1} \operatorname{BS}_S^\dagger B_T$$

cliquer pour la video

Forces de Laplace : motivations



Forces de Laplace : motivations



- Un stellarator coûte cher...

Forces de Laplace : motivations



- Un stellarator coûte cher...
- Un stellarator compact nécessite un champ magnétique plus intense.

Forces de Laplace : motivations



- Un stellarator coûte cher...
- Un stellarator compact nécessite un champ magnétique plus intense.
- Donc des courants plus forts.

Forces de Laplace : motivations



- Un stellarator coûte cher...
- Un stellarator compact nécessite un champ magnétique plus intense.
- Donc des courants plus forts.
- Les forces de Laplace ($d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$) augmentent quadratiquement.

Forces de Laplace : motivations



- Un stellarator coûte cher...
- Un stellarator compact nécessite un champ magnétique plus intense.
- Donc des courants plus forts.
- Les forces de Laplace ($d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$) augmentent quadratiquement.

⇒ Les forces de Laplace doivent être optimisées.

Problème : Comment définir les forces de Laplace sur une distribution surfacique de courant ?

Énoncé du problème

Soit S une surface et $j \in \mathfrak{X}(S)$ un champ de vecteur.
Rappel : Biot et Savart

$$\forall y \notin S, \text{BS}(j)(y) = \int_S j(x) \times \frac{y-x}{|y-x|^3} dS(x)$$

$$\triangle ! \quad \int_S \frac{1}{|x-y|^2} dx = \infty \quad \text{si } y \in S$$

Quelques remarques

B n'explose pas au voisinage de S .

Forces de Laplace moyenne

On définit

$$L_\varepsilon(j)(y) = \frac{1}{2}(j \wedge [B(j)(y + \varepsilon n(y)) + B(j)(y - \varepsilon n(y))])$$

$$L(j) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(j)$$

Quelques questions

- 1 Sous quelles hypothèses sur j peut-on définir $L(j)$?
- 2 Existe-t-il une expression explicite pour $L(j)$?
- 3 À quel espace fonctionnel $L(j)$ appartient-il (pour j dans un certain espace fonctionnel) ?

Un problème à 3 échelles

pour calculer L à partir de L_ε , 3 échelles interviennent :

- ① la taille typique de la discrétisation de S : h ,
- ② le paramètre ε ,
- ③ la distance caractéristique de variation du champ magnétique induit : d_B .

Pour une bonne convergence, il faut

- $h \ll \varepsilon$ car $\int_S |y + \varepsilon n(y) - x|^{-2} dS(x)$ explose lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
- $\varepsilon \ll d_B$ pour approcher L .

Théorème [R., Volpe, *Nuclear Fusion*, 2022]

Soit $j \in H^1$, alors $L_\varepsilon(j)$ converge dans $L^p(S, \mathbb{R}^3)$ pour $1 \leq p < \infty$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

De plus, L est une application continue (quadratique)
 $H^1 \rightarrow L^p(S, \mathbb{R}^3)$ donnée par

$$\begin{aligned} L(j)(y) = & - \int_S \frac{1}{|y-x|} [\operatorname{div}_x(\pi_x j(y)) + \pi_x j(y) \cdot \nabla_x] j(x) dx \\ & + \int_S \langle j(y) \cdot n(x) \rangle \frac{\langle y-x, n(x) \rangle}{|y-x|^3} j(x) dx \\ & + \int_S \frac{1}{|y-x|} [\langle j(y) \cdot j(x) \rangle \operatorname{div}_x(\pi_x) + \nabla_x \langle j(y) \cdot j(x) \rangle] dx \\ & - \int_S \langle j(y) \cdot j(x) \rangle \frac{\langle y-x, n(x) \rangle}{|y-x|^3} n(x) dx \end{aligned}$$

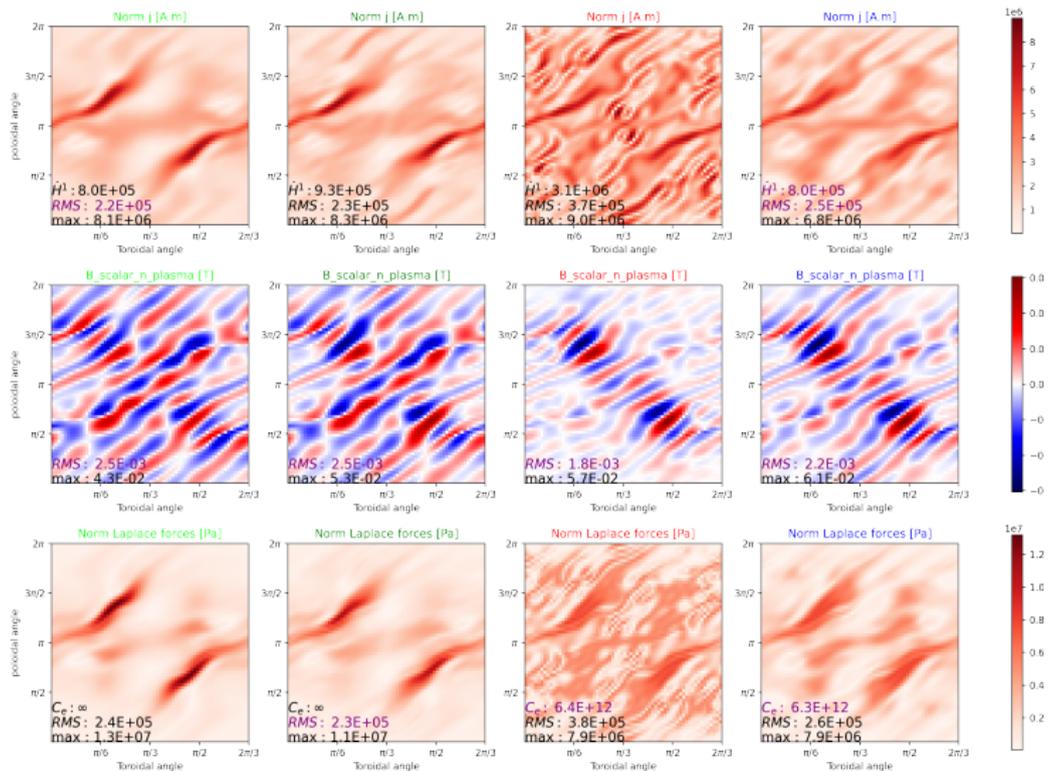
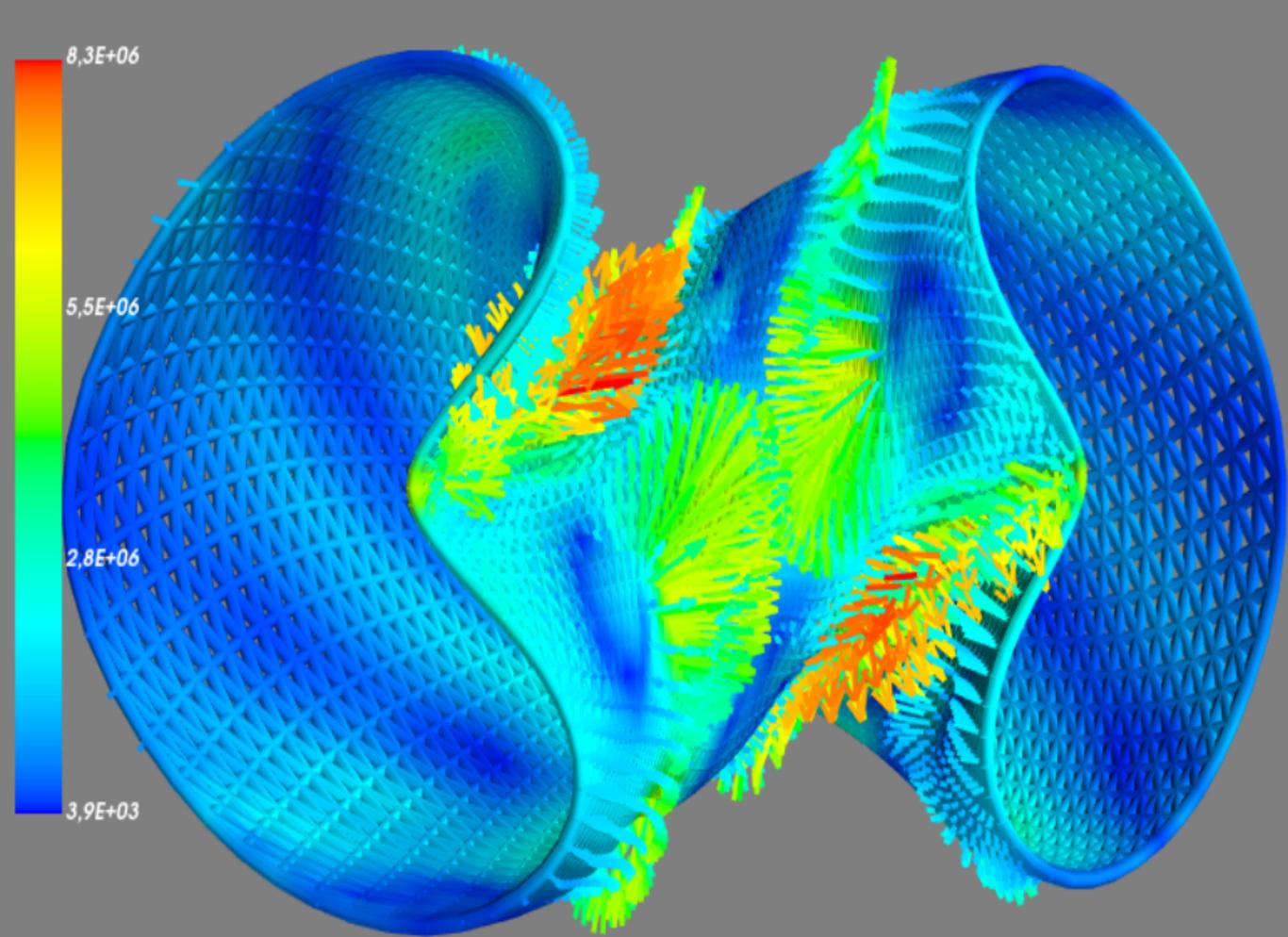


FIGURE – De gauche à droite : simulation sans pénalisation sur les forces de Laplace, pénalisation L^2 sur les forces, pénalisation des valeurs extrêmes et pénalisation des valeurs extrêmes avec pénalisation H^1 de j .



Optimisation de la CWS

$$\inf_{\substack{j \in L^2(\mathfrak{X}(S)) \\ \operatorname{div} j = 0}} \chi_B^2(j) + \lambda \|j\|_{L^2}^2$$

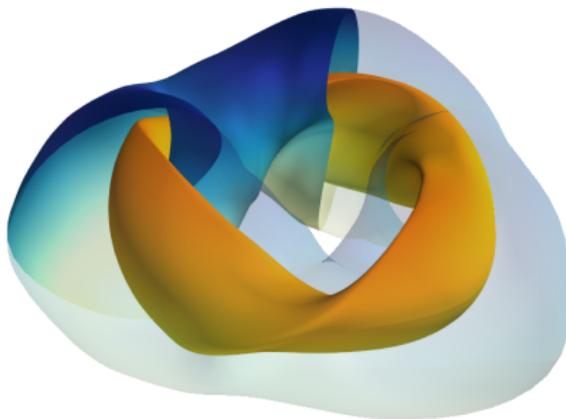


FIGURE – Coil winding surface et surface du plasma pour NCSX.

Optimisation de la CWS

$$\inf_{S \in \mathcal{O}_{\text{adm}}} \inf_{\substack{j \in L^2(\mathfrak{X}(S)) \\ \text{div } j = 0}} \chi_B^2(j) + \lambda \|j\|_{L^2}^2$$

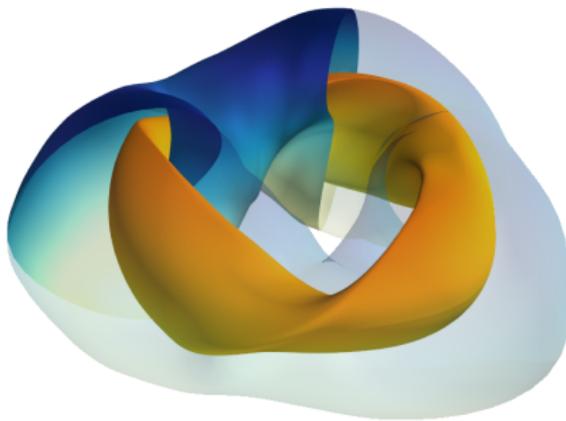


FIGURE – Coil winding surface et surface du plasma pour NCSX.

Première approche par Paul et al. (2018).

Notre contribution

- Existence d'un minimiseur pour le problème d'optimisation de forme
- Expression du gradient de forme
- Développement d'un logiciel pour les simulations numériques

Formes admissibles

Contraintes sur l'ensemble des formes admissibles $S \in \mathcal{O}_{\text{adm}}$:

- ① S est une surface homotopique au tore usuel
- ② $\text{dist}(S, P) \geq \delta$
- ③ S est contenue dans un compact fixé
- ④ $\mathcal{H}^2(S) \leq A_M$

cliquer pour la video

Formes admissibles

Contraintes sur l'ensemble des formes admissibles $S \in \mathcal{O}_{\text{adm}}$:

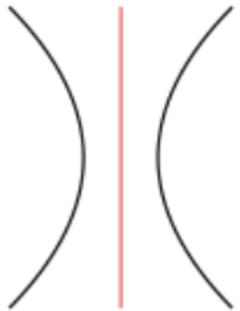
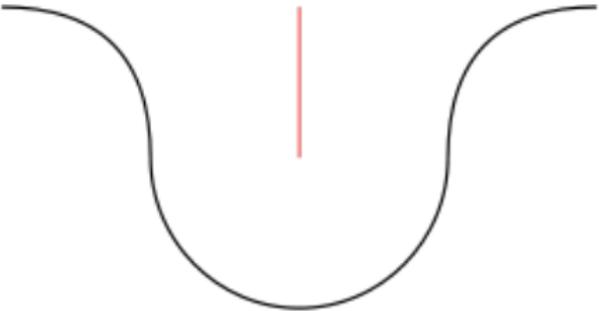
- ① S est une surface homotopique au tore usuel
- ② $\text{dist}(S, P) \geq \delta$
- ③ S est contenue dans un compact
- ④ $\mathcal{H}^2(S) \leq A_M$
- ⑤ **Borne inférieure sur le Reach de S**

Reach

$V \subset \mathbb{R}^n$ un fermé, $Sk(V)$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^n dont la projection orthogonale sur V n'est pas unique.

$$U_h(V) = \{x \mid d(x, V) < h\}$$

$$Reach(V) = \sup\{h \mid U_h(V) \cap Sk(V) = \emptyset\}$$



Reach

Théorème [Privat, R. , Sigalotti, *JMPA*, 2022]

Le problème d'optimisation de forme

$$\inf_{S \in \mathcal{O}_{\text{adm}}} \inf_{\substack{j \in L^2(\mathfrak{X}(S)) \\ \text{div } j = 0}} \chi_B^2 + \lambda \|j\|_{L^2}^2$$

admet un minimiseur.

Idées de la preuve

- Compacité de \mathcal{O}_{adm} ,
- Semi-continuité inférieure du coût
 - Transporter j
 - Utiliser une approximation volumique

Reach

Théorème [Privat, R. , Sigalotti, *JMPA*, 2022]

Le problème d'optimisation de forme

$$\inf_{S \in \mathcal{O}_{\text{adm}}} \inf_{\substack{j \in L^2(\mathfrak{X}(S)) \\ \text{div } j = 0}} \chi_B^2 + \lambda \|j\|_{L^2}^2$$

admet un minimiseur.

Idées de la preuve

- Compacité de \mathcal{O}_{adm} ,
- Semi-continuité inférieure du coût
 - Transporter j
 - Utiliser une approximation volumique

Développement d'un framework général dans le chapitre (III).

Soit b_Ω la distance signée à Ω .

R -convergence dans \mathcal{O}_{adm}

Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_{\text{adm}}$, on définit la R -converge de $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\Omega_\infty \in \mathcal{O}_{\text{adm}}$ par

$$b_{\Omega_n} \rightarrow b_{\Omega_\infty} \quad \begin{cases} \text{dans } \mathcal{C}(\bar{D}) \\ \text{dans } \mathcal{C}^{1,\alpha}(U_r(\partial\Omega_\infty)), \forall r < r_0, \forall \alpha \in [0, 1) \\ \text{faible étoile dans } W^{2,\infty}(U_r(\partial\Omega_\infty)), \forall r < r_0 \end{cases}$$

Lemme

\mathcal{O}_{adm} est séquentiellement compact pour la R -convergence.

Extension des résultats de Dalphin (2018-20).

Gradient de forme

- Soit $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ une perturbation

Gradient de forme

- Soit $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ une perturbation
- $\varphi^\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon\theta$ induit un difféomorphisme de S vers S^ε

Gradient de forme

- Soit $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ une perturbation
- $\varphi^\epsilon = \text{Id} + \epsilon\theta$ induit un difféomorphisme de S vers S^ϵ
- On souhaite calculer $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C(S^\epsilon) - C(S)}{\epsilon}$

Gradient de forme

- Soit $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ une perturbation
- $\varphi^\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon\theta$ induit un difféomorphisme de S vers S^ε
- On souhaite calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(S^\varepsilon) - C(S)}{\varepsilon}$
- La différentielle de $\varphi^\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon\theta$ induit un difféomorphisme de $\mathfrak{X}(S)$ vers $\mathfrak{X}(S^\varepsilon)$

Gradient de forme

- Soit $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ une perturbation
- $\varphi^\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon\theta$ induit un difféomorphisme de S vers S^ε
- On souhaite calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(S^\varepsilon) - C(S)}{\varepsilon}$
- La différentielle de $\varphi^\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon\theta$ induit un difféomorphisme de $\mathfrak{X}(S)$ vers $\mathfrak{X}(S^\varepsilon)$
- Mais l'image des champs à divergence nulle n'est pas à divergence nulle...

$$\Phi^\varepsilon : \mathfrak{F}_S \longrightarrow \mathfrak{F}_{S^\varepsilon}$$

$$X \longmapsto \frac{1}{[J(\mu_S, \mu_S^\varepsilon)\varphi^\varepsilon] \circ \varphi^{-\varepsilon}} (\text{Id} + \varepsilon D\theta)X \circ \varphi^{-\varepsilon}$$

Gradient de forme

Soit $\theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\langle dC(S), \theta \rangle = \int_S \theta \cdot (X_1 - \text{div}_S(X_2)_{i:}) d\mu_S$$

où

$$X_1 = -2\hat{Z}_P(BS_S j_S - B_T, j_S)$$

$$X_2 = -2Z_P(BS_S j_S - B_T)j_S^T + 2\lambda j_S j_S^T - \lambda |j_S|^2 (I_3 - \nu\nu^T),$$

où $i \in \{1, 2, 3\}$, $(X_2)_{i:}$ est la ligne i de X_2 et ν est le vecteur normal extérieur sur $S = \partial V$.

Et

$$Z_P(k) = \int_P K(\cdot, y) \times k(y) d\mu_P(y)$$

$$\hat{Z}_P(k, j)(x) = \int_P D_x \left(\frac{x-y}{|x-y|^3} \right)^T (k(y) \times j(x)) d\mu_P(y), \quad \forall x \in S.$$

cliquer pour la video

Quelques Perspectives

- Optimisation sur de nouvelles surfaces et amélioration de Stellacode⁴
- Forces de Laplace et optimisation de forme
- Optimisation du plasma

4. <https://rrobin.pages.math.cnrs.fr/stellacode/>

Contrôle d'ensemble : courte introduction

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), w(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t, \alpha) = f(x(t, \alpha), \alpha, w(t)) \\ x(0, \alpha) = x_0 \quad \alpha \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (2)$$

Définition : le système (1) est approximativement contrôlable entre x_0 et $x_f \in E$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \exists w \in L^\infty([0, T], U), \|x(T) - x_f\| \leq \varepsilon$$

Définition : le système est (2) approximativement ensemble contrôlable entre x_0 et $x_f \in E$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \exists w \in L^\infty([0, T], U), \sup_{\alpha \in \mathcal{D}} \|x(T, \alpha) - x_f\| \leq \varepsilon$$

Modélise :

- Incertitudes/fluctuations sur le système
- Ensemble de systèmes que l'on souhaite contrôler avec un seul contrôle

Quelques travaux fondateurs : Li–Khaneja, Beauchard–Coron–Rouchon, Agrachev–Baryshnikov–Sarychev, Augier–Boscain–Sigalotti . . .

Soit $E > 0$ et α le paramètre de dispersion.

$$\forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], H^\alpha(w) = \begin{pmatrix} E + \alpha & w \\ w^* & -E - \alpha \end{pmatrix}.$$

Transfert de population : A-t-on contrôlabilité d'ensemble entre l'état fondamental (\bar{e}_2) et l'état excité (\bar{e}_1) ?

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \exists w \in L^\infty([0, T], U), \forall \alpha \in \mathcal{D}, \exists \theta \in \mathbb{R}, \\ \|\psi^\alpha(T) - e^{i\theta} \mathbf{e}_1\| \leq \varepsilon$$

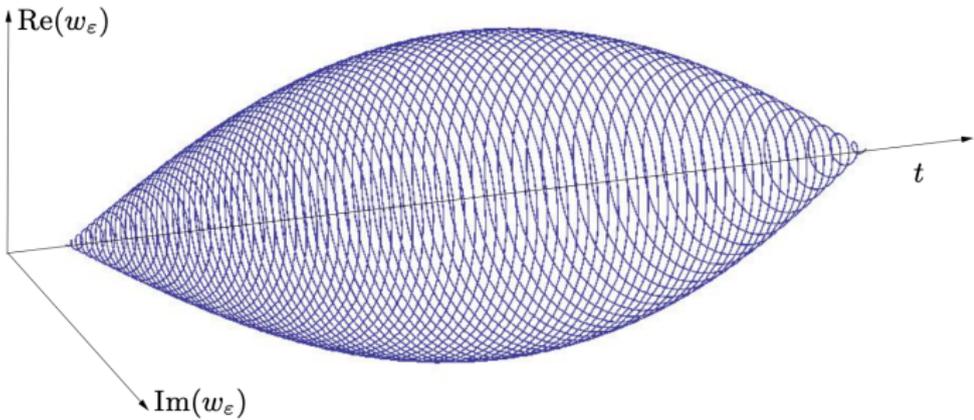
avec

$$i\partial_t \psi^\alpha(t) = H^\alpha(w(t))\psi^\alpha(t), \quad \psi^\alpha(0) = \mathbf{e}_2$$

- Oui avec un contrôle complexe borné
- En pratique on 'duplique' le contrôle réel grâce à la RWA

L'approximation de l'onde tournante pour 'dupliquer' le contrôle avant l'utilisation d'un *chirp adiabatique* est fréquente dans la littérature physique :

- M. H. MITTLEMAN. *Introduction to the Theory of Laser-Atom Interactions*. Boston, MA : Springer US, 1982
- B. W. SHORE. *Manipulating quantum structures using laser pulses*. Cambridge : Cambridge University Press, 2011
- N. V. VITANOV, M. FLEISCHHAUER, B. W. SHORE et K. BERGMANN. "Coherent manipulation of atoms and molecules by sequential laser pulses". In : *Advances in Atomic Molecular and Optical Physics* 46 (2001), p. 55-190
- Z. LEGHTAS, A. SARLETTE et P. ROUCHON. "Adiabatic passage and ensemble control of quantum systems". In : *Journal of Physics B* 44.15 (2011)
- ...



Théorème adiabatique

Il existe $C > 0$ (qui dépend du chemin) tel que, pour tout $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ et $\varepsilon > 0$, la solution ψ_ε^α de

$$i \frac{d\psi_\varepsilon^\alpha}{dt} = H^\alpha(u(\varepsilon t) e^{-2i(Et + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds)}) \psi_\varepsilon^\alpha, \quad \psi_\varepsilon^\alpha(0) = e_2$$

satisfait $|\psi_\varepsilon^\alpha(1/\varepsilon) - (e^{i\theta}, 0)| \leq C\varepsilon$ pour un certain θ .

Approximation de l'onde tournante

Motivation

$$w_\varepsilon(t) = 2\varepsilon u(\varepsilon t) \cos \left(2Et + 2 \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds \right)$$
$$w_\varepsilon^R(t) = \varepsilon u(\varepsilon t) \exp \left(-i \left(2Et + 2 \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds \right) \right)$$

Dans le cas $\alpha = 0$, l'évolution associée au contrôle complexe dans le référentiel d'interaction est :

$$i \frac{d\hat{\psi}_{w_\varepsilon}^R}{dt} = \varepsilon \begin{pmatrix} -v(\varepsilon t) & u(\varepsilon t) \\ u(\varepsilon t) & v(\varepsilon t) \end{pmatrix} \hat{\psi}_{w_\varepsilon}^R$$

Approximation de l'onde tournante

$$w_\varepsilon(t) = 2\varepsilon u(\varepsilon t) \cos \left(2Et + 2 \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds \right),$$
$$w_\varepsilon^R(t) = \varepsilon u(\varepsilon t) \exp \left(-i \left(2Et + 2 \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds \right) \right).$$

Moyennisation

Soient $\alpha = 0$, ψ_{w_ε} et $\psi_{w_\varepsilon}^R$ l'évolution de ψ_0 avec les contrôles w_ε et w_ε^R . Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\forall t \in [0, 1/\varepsilon], |\psi_{w_\varepsilon}(t) - \psi_{w_\varepsilon^R}(t)| < C\varepsilon.$$

Comparaison des deux approximations

RWA

$$w_\varepsilon(t) = 2\varepsilon u(\varepsilon t) \cos \left(2Et + 2 \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds \right)$$
$$w_\varepsilon^R(t) = \varepsilon u(\varepsilon t) \exp \left(-i(2Et + 2 \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds) \right)$$

ont la même dynamique à ε près pendant un temps $1/\varepsilon$.

AA

$$w_\varepsilon(t) = u(\varepsilon t) \exp \left(-i(2Et + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds) \right)$$

permet un transfert de population pour tout α à l'ordre ε en un temps $1/\varepsilon$.

Première idée :
prendre u petit et utiliser

$$w_\varepsilon(t) = u(\varepsilon t) 2 \cos \left(2Et + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds \right)$$

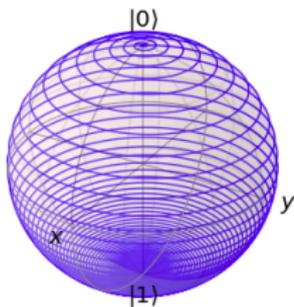
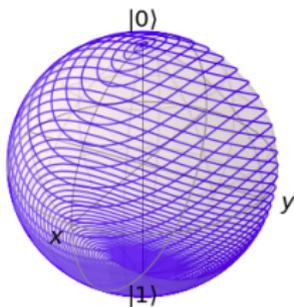
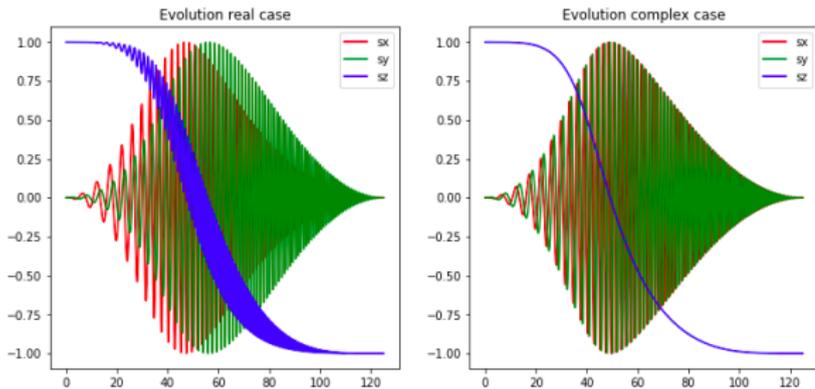
pour simuler

$$u(\varepsilon t) \exp \left(-i \left(2Et + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon t} v(s) ds \right) \right)$$

Pb : ne marche pas numériquement en général.

Dilemme

- RWA : petit contrôle et temps final pas trop long.
- AA : plus le contrôle est petit, plus le temps final doit être long.



Trajectoires sur la sphère de Bloch.

Un résultat de contrôlabilité

Soit $\mathcal{D} = [\alpha_0, \alpha_1] \times [\delta_m, \delta_M]$ un ensemble compact et $\mathcal{F} := C^0(\mathcal{D}, \text{SU}_2)$. $d_{\mathcal{F}}(f, g) := \max_{d \in \mathcal{D}} \|f(d) - g(d)\|$.

**Théorème [Li–Khaneja 2006, voir aussi
Beauchard–Coron–Rouchon 2010]**

Pour toute borne $K > 0$, distribution cible $M_F \in \mathcal{F}$ et précision $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ et des contrôles $u, v \in L^\infty([0, T], [-K, K])$ tels que la solution de

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} M(\alpha, \delta, t) = ((E + \alpha)\sigma_z + \delta u(t)\sigma_x + \delta v(t)\sigma_y) M(\alpha, \delta, t) \\ M(\alpha, \delta, 0) = I_2, \quad (\alpha, \delta) \in \mathcal{D} \end{cases}$$

satisfasse $d_{\mathcal{F}}(M(\cdot, \cdot, T), M_F(\cdot, \cdot)) < \varepsilon$.

Publications dans le cadre de cette thèse

Articles publiés :

- R. ROBIN et F. A. VOLPE. “Minimization of magnetic forces on stellarator coils”. In : *Nuclear Fusion* 62.8 (2022), p. 086041
- Y. PRIVAT, R. ROBIN et M. SIGALOTTI. “Optimal shape of stellarators for magnetic confinement fusion”. In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 163 (2022), p. 231-264
- R. ROBIN, N. AUGIER, U. BOSCAIN et M. SIGALOTTI. “Ensemble qubit controllability with a single control via adiabatic and rotating wave approximations”. In : *Journal of Differential Equations* 318 (2022), p. 414-442

Articles soumis :

- Y. PRIVAT, R. ROBIN et M. SIGALOTTI. *Existence of surfaces optimizing geometric and PDE shape functionals under reach constraint*. 2022. arXiv : 2206.04357 [math]
- R. ROBIN, U. BOSCAIN, M. SIGALOTTI et D. SUGNY. *Chattering phenomenon in quantum optimal control*. 2022. arXiv : 2206.13868 [quant-ph]
- R. ROBIN. *Small-time global null controllability of generalized Burgers' equations*. 2022. arXiv : 2206.05931 [math]

Logiciel : Stellacode <https://rrobin.pages.math.cnrs.fr/stellacode/>

Stellarator

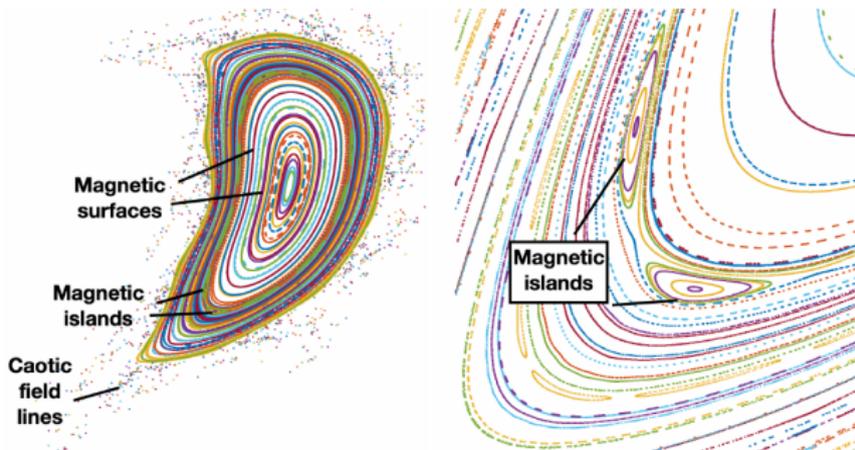


FIGURE – Application de Poincaré, issue de *An introduction to symmetries in stellarators*, Imbert-Gérard et al.

Cohomology and divergence free vector fields on the torus

Hodge decomposition

On a closed Riemannian manifold M

$$L^2_p(M) = B_p \oplus B_p^* \oplus \mathcal{H}_p,$$

where

- B_p is the L^2 -closure of $\{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{p-1}(M)\}$
- B_p^* is the L^2 -closure of $\{d^*\beta \mid \beta \in \Omega^{p+1}(M)\}$
- \mathcal{H}_p is the set $\{\omega \in \Omega^p(M) \mid \Delta_H \omega = 0\}$ of harmonic p -forms with Δ_H the Hodge Laplacian

In vacuo Maxwell equations on a toroidal 3D domain

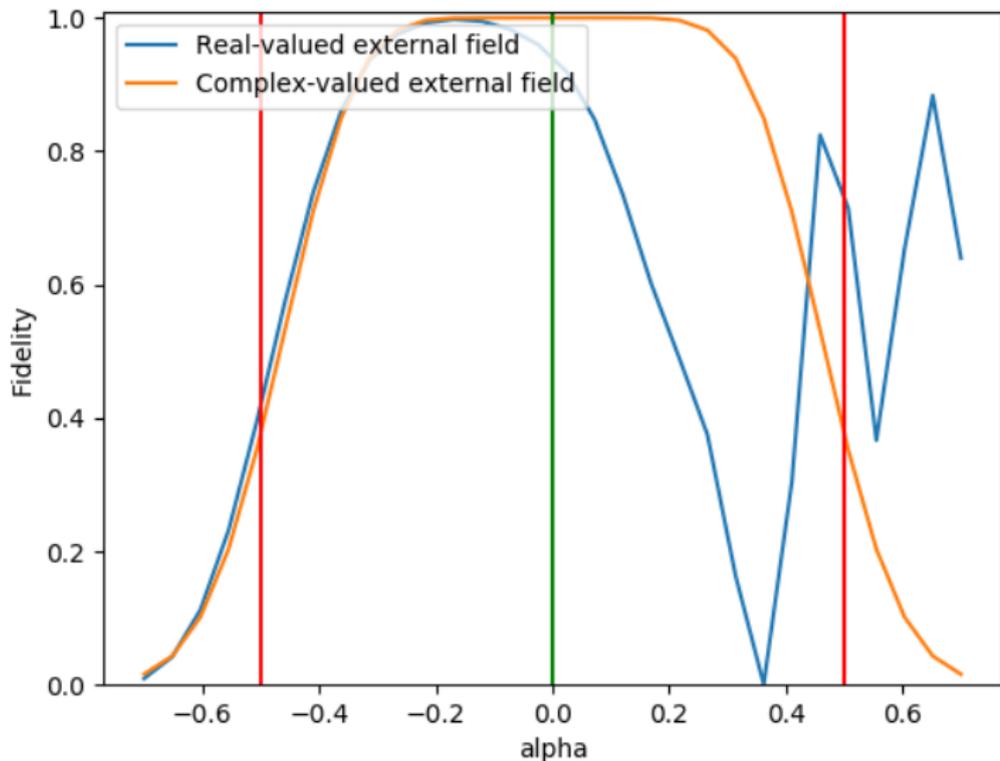
Let P be a toroidal domain. Let Γ be a toroidal loop inside P and denote by I_p the electric current-flux across any surface enclosed by Γ (also equal to the circulation of B along Γ).

Lemma

Let $B \in C^\infty(P, \mathbb{R}^3)$ such that $\operatorname{div} B = 0$ and $\operatorname{curl} B = 0$ in P . Let g be the normal magnetic field on ∂P . Then g and I_p determine completely the magnetic field B in P . Besides, there exists a constant $C > 0$ such that for every other magnetic field \tilde{B} with the same total poloidal currents, $|B - \tilde{B}|_{L^2(P, \mathbb{R}^3)} \leq C|g - \tilde{g}|_{L^2(\partial P)}$ where \tilde{g} is the normal component of $\tilde{B}|_{\partial P}$.

Idea : consider the cochain complex

$$\mathcal{C}^\infty(P) \xrightarrow{\operatorname{grad}} \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{curl}} \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathcal{C}^\infty(P).$$



La condition $\forall s > 0, 4E + 6v(s) - 2\alpha > 0$ est valide pour $\alpha < 0$ sur cette simulation.

Adiabatic Approximation

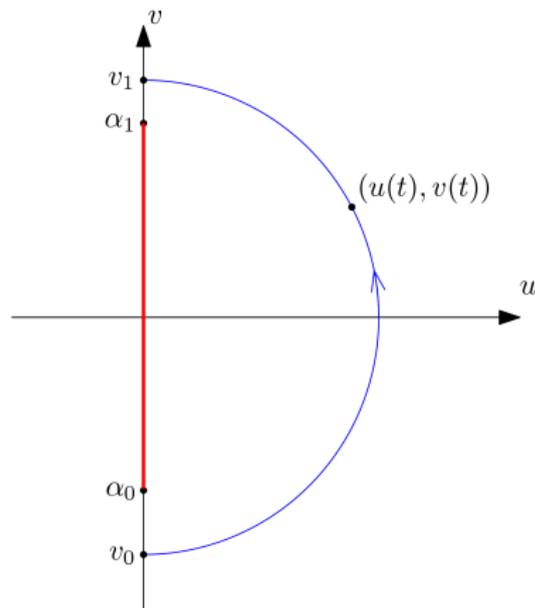
Adiabatic Approximation

Let $H_\alpha(u, v) = (\alpha - v)\sigma_z + u\sigma_x$. The eigenvalues of $H_\alpha(u, v)$ are $\pm\sqrt{(\alpha - v)^2 + u^2}$.

Initial and finite time Hamiltonian

$$H_\alpha(0, v_0) = \begin{pmatrix} \alpha - v_0 & 0 \\ 0 & -\alpha + v_0 \end{pmatrix}$$

$$H_\alpha(0, v_1) = \begin{pmatrix} \alpha - v_1 & 0 \\ 0 & -\alpha + v_1 \end{pmatrix}$$



Generalized Burgers' equations

$$\begin{cases} y_t + (|y|^\gamma)_x - y_{xx} = u(t) & \text{on } (0, T) \times (0, 1), \\ y(t, 0) = v(t) & \text{on } (0, T), \\ y(t, 1) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{on } (0, 1), \end{cases} \quad (E_\gamma)$$

Theorem (R., 2022)

Suppose $\gamma > 3/2$, $y_0 \in L^\infty(0, 1)$ and $T > 0$. Then, there exist $u \in L^\infty(0, T)$ and $v \in H^{1/4}(0, T) \cap L^\infty(0, T)$ steering the solution y of (E_γ) to the null state in time T .